LEGI DE COMPOZIŢIE
TEMA 1

1 Pe R definim operaţia $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$

a)Arătaţi că $(R; *)$ formează un monoid comutativ.

b)Găsiţi U(R) (mulţimea elementelor simetrizabile).

c)Arătaţi că $x * y = 2(x - 1)(y - 1) + 1$

d)Calculaţi :$\frac{1}{2019} * \frac{2}{2019} * \frac{3}{2019} \cdots \frac{2020}{2019}$

e)Rezolvaţi ecuaţia:

$$x * x * x = x$$

2 Pe R se defineşte operaţia :

$$x * y = xy - x - y + 2$$

a)Arătaţi că $*$ este lege de compoziţie pe R.

b)Arătaţi ca $x * y = (1 - x)(1 - y) + 1$

c)Găsiţi elementul neutru.

d Calculaţi:

$$(-\frac{1}{2018}) * (-\frac{1}{2017}) \ldots\ldots * (-\frac{1}{2}) * (-1)$$

3 Pe $C \setminus \{-i\}$ se consideră legea de compoziţie :

$$x * y = xy + i(x + y) - 1 - i$$

a)Arătaţi că $x * y = (x + i)(y + i) - i$

b)Arătaţi ca $(G; *)$ este grup abelian.

4 Fie$G = (2; +\infty) \setminus \{3\}$ şi operaţia

$$x * y = (x - 2)^{\frac{1}{2}\ln(y-2)} + 2$$

Verificaţi dacă $(G;*)$ este grup.

5 Dacă $G = \{x = a + b\sqrt{3}/a, b, \in Q\ a \neq b\}$ arătaţi că $(G;\cdot)$ este grup.

6 Dacă $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} a, b, \in Z \middle/ a^2 + 3b^2 = 1\right\}$ arătaţi că $(G;\cdot)$ este grup.

7 Daca $G = \left\{X(a) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}\right\}$

a)Arătaţi ca $X(a) \cdot X(b) = X(a + b)$

b)Arătaţi ca $(G;\cdot)$ este grup.

c)Calculaţi $X(a)^{2018}$

d)Calculaţi $X(1) \cdot X(2) \cdot X(3) \ldots . \cdot X(n)$.

8 Dacă $G = \left\{A(x) = \begin{pmatrix} 1 + 5x & 15x \\ -x & 1 - 3x \end{pmatrix} x \in R \setminus \{-\frac{1}{2}\}\right\}$

a)Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + 2xy)$

b)Arătaţi că $(G;\cdot)$ este grup.

c)Arătaţi că funcţia $f : R^* \to G\ f(x) = A(\frac{x-1}{2})$ este izomorfism de la grupul $(R^*;\cdot)$ la grupul $(G;\cdot)$

9 Dacă $G = \left\{A(x) = \begin{pmatrix} 1 - x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 - x \end{pmatrix} x \in R \setminus \{-\frac{1}{2}\}\right\}$ arătaţi ca $(G;\cdot)$ este grup.