Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=3-i$. Arătați că $z^2-6z+10=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+6$. Determinați numărul real a, știind că $f(a)=f(a-2)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4\left(x^2+4x+5\right)=\log_4(2x+4)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 16.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$, $B(3,3)$ şi $C(7,3)$. Determinaţi coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}x+2\sin\frac{5x}{3}$, unde $x\in(0,\pi)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -2a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2a & -2a^2 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $A(n)=A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)$, atunci numărul natural n este multiplu de 2021.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-\sqrt{3}(x+y)+3+\sqrt{3}$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{3}*0=\sqrt{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}}*\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-x(x+2)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(g(1)+g(2)+\ldots+g(n)\right)=\frac{1}{e-1}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{(x+2)^2}$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx = 2$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = 2-\ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x (x+1)^n (f(x))^n\,dx$.

Demonstrați că $I_n + 2nI_{n-1} = 3^n e - 1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.