

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică  $M\_mate-info$

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex  $z = 1 + i$ . Arătați că  $2z - z^2 = 2$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - mx + 2m$ , unde  $m$  este număr real. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $m$ , știind că  $f(x) > 0$  pentru orice număr real  $x$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(\sqrt{x} + 1) + \log_5(\sqrt{x} - 1) = 2$ .
- 5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 32 de submulțimi.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(0,1)$ ,  $B(2,5)$  și  $C(6,1)$ . Determinați coordonatele punctului  $D$ , știind că  $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$ .
- 5p 6. Determinați  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  pentru care  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x - \cos x$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 2-a \\ 0 & 2 & 0 \\ 2-a & 0 & a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(2)) = 8$ .
- 5p b) Demonstrați că  $A(a)A(b) = 2A(ab - a - b + 2)$ , pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p c) Determinați perechile de numere întregi  $p$  și  $q$  pentru care  $A(p)A(q) = 4I_3$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = -\frac{3}{5}xy + x + y$ .
- 5p a) Arătați că  $x * y = -\frac{3}{5}\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p b) Arătați că  $\frac{5x}{3} * \frac{5}{3x} \geq \frac{5}{3}$ , pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p c) Calculați  $\frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \frac{3}{3} * \dots * \frac{2020}{3}$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x - \ln(x^2 + 1)$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2(2x^2 - x + 2)}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  este bijectivă.
2. Se consideră funcția  $f: (-5, 5) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{74}{3}$ .

**5p** b) Calculați  $\int_{-3}^3 |x f(x)| dx$ .

**5p** c) Pentru fiecare număr natural nenul  $n$ , se consideră numărul  $I_n = \int_0^1 \frac{1}{f^n(x)} dx$ . Demonstrați că șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$  este monoton.