

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Test 6**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați partea reală a numărului complex  $z = (1 + i\sqrt{3})^2 - (1 - i\sqrt{3})^2$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5 - 2x$ . Arătați că  $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) < 0$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2$ .
- 5p** 4. Se consideră mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui  $A$ , care conțin exact 2 numere impare.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul  $ABC$  și punctele  $M$ ,  $N$  și  $P$  astfel încât  $\overline{AM} = 2\overline{AB}$ ,  $\overline{BN} = 2\overline{BC}$  și  $\overline{CP} = 2\overline{CA}$ . Știind că  $O$  este un punct oarecare din plan, arătați că  $\overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ .
- 5p** 6. Știind că  $x \in (\pi, 2\pi)$  și  $\cos 2x = \frac{1}{3}$ , calculați  $\sin x$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & a & 5 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} 2x + ay + 2z = 4 \\ 3x + ay + 2z = 1 \\ 2x + ay + 5z = b \end{cases}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = -3$ .
- 5p** b) Pentru  $a = -1$  și  $b = -2$ , rezolvați sistemul de ecuații.
- 5p** c) Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.
2. Pe mulțimea  $G = (1, +\infty)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2} + 2$ .
- 5p** a) Arătați că  $x * y = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + 1$ , pentru orice  $x, y \in G$ .
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p** c) Știind că  $(G, *)$  este grup, demonstrați că funcția  $f: M \rightarrow G$ ,  $f(x) = \sqrt{x+1}$  este un izomorfism de la grupul  $(M, \cdot)$  la grupul  $(G, *)$ , unde  $M = (0, +\infty)$  și „ $\cdot$ ” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+1)e^{-x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = -xe^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(f(n))^n}{e^n (f(n+1))^n}$ .
- 5p** c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $m$  pentru care ecuația  $f(x) = m$  are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \frac{2}{x+1}$ .

5p a) Arătați că  $\int_0^1 (f(x) - x) dx = 2 \ln 2$ .

5p b) Calculați  $\int_1^e \left( f(x) - \frac{2}{x+1} \right) \ln x dx$ .

5p c) Determinați  $a \in (0, +\infty)$  pentru care  $\int_0^1 2f(x)F(x) dx = \frac{1}{4} + \ln 4 + \ln^2 a$ , unde  $F$  este primitiva funcției  $f$  pentru care  $F(0) = 0$ .