

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați partea întreagă a numărului real $x = (\sqrt{2} - 1)^2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta de ecuație $y = 2x - 3$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{7-2x}$.
- 5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overline{AC} = 2\overline{AB}$.
- 5p 6. Calculați perimetrul triunghiului ABC , știind că $AB = 2$, $AC = 3$ și $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}$ și $(A(a))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 3 & a & 0 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice număr rațional q , matricea $A(q)$ este inversabilă.
- 5p c) Se consideră matricea $B(a) = A(a) - (A(a))^t$. Determinați numerele raționale p pentru care $B(p)B(p)B(p) + 5B(p) = O_3$.
2. Pe mulțimea $G = (0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.
- 5p b) Verificați dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Știind că $(G, *)$ este grup, demonstrați că funcția $f: G \rightarrow M$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul (M, \cdot) , unde $M = (0, +\infty)$ și „ \cdot ” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 1 + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați $m \in (0, +\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $M(m, f(m))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2x$.
- 5p c) Demonstrați că $x \ln x + \frac{1}{e} \geq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

5p a) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x) dx = \frac{1}{2}$.

5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^n dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.