Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați suma primilor cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 5$ și rația $r = 2$.
5p	**2.** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $x^2 - ax + a - 1 = 0$ are soluții reale distincte.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3 - \sqrt[3]{x^2 + x + 2} = 1$.
5p	**4.** Calculați $2C_4^3 - 3A_4^2$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + \left(a^2 + 1\right)\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB = 8$, $BC = 8$ și aria egală cu 16. Determinați măsura unghiului B.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x, y) = xI_2 + yA$, unde x și y sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det A = -1$.
5p	**b)** Demonstrați că $M(x, y) \cdot M(a, b) = M(xa + yb, xb + ya)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.
5p	**c)** Determinați perechile (x, y) de numere reale, știind că $\det(M(x, y)) = 4$ și suma elementelor matricei $M(x, y) \cdot M(x, y)$ este egală cu 8.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 1$ și $x \circ y = xy - x - y + 2$.
5p	**a)** Arătați că $2 \circ (1 * 3) = (2 \circ 1) * (2 \circ 3)$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $3^{x \circ x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x * x}$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $(x - 1) * (2y + 1) = 2$ și $(x + y) \circ 4 = 10$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 5x - 3, & x \in (-\infty, 1) \\ x^2 - x + \sqrt{x^2 + 3}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$.
5p	**a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că, pentru orice număr real a, $a > 1$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ **nu** este paralelă cu axa Ox.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1, +\infty)$.
	2. Se consideră funcțiile $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + x + 1$ și $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2x}{2x}$.
5p	**a)** Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^4 g(x)\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m, $m>1$, pentru care $\int_1^m f(x)\cdot g(x)\,dx = 20$.