Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Comparați numerele $\log_2 16$ și $\sqrt[3]{125}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(a+2)x+2a+1$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care graficul funcției f este tangent axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-x-2}=5^{3x-5}$.

5p **4.** Demonstrați că numerele C_4^1, A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,a)$ și $C(4,2a+1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Determinați raza cercului circumscris triunghiului MNP, știind că $MN=16$ și $m(\sphericalangle P)=30°$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 1 & -1 & -a\\ a & -1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay-z=a\\ x-y-az=-1\\ ax-y+z=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-4$.

5p **b)** Determinați mulțumea valorilor reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) pentru care $x_0=y_0=z_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+8}$.

5p **a)** Arătați că $2020*(-2020)=2$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(\mathbb{R},*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+8$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-2+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+4}$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x))=2$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-2,+\infty)$.

5p **c)** Determinați $x\in[-1,+\infty)$ pentru care $f(x)\in\mathbb{Z}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 \dfrac{x+1}{f(x)}\,dx=e^2-1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^{3x}f^2(x)\,dx$.

5p **c)** Se consideră numerele reale pozitive a, b și c. Demonstrați că, dacă $1-\int_0^a \frac{f(x)}{x+1}\,dx$, $1-\int_0^b \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ și $1-\int_0^c \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, atunci a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.