

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul real a , $a > 1$, pentru care numerele $a-1$, 3 și $a+7$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 2. Determinați suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x - 3$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} - 3^x - 8 = 0$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să verifice inegalitatea $C_n^2 \leq 3C_n^1$.
- 5p 5. Determinați numerele reale m , $m \neq 2$, pentru care vectorii $\vec{u} = 4\vec{i} + m\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-2)\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p 6. Determinați perimetrul triunghiului ABC , știind că $AB = 5$, $AC = 4$ și $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} (m^2 - 1)x + my + 4z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ mx + 3y + z = -1 \end{cases}, \text{ unde } m \text{ este număr real.}$$

- 5p a) Determinați numărul real m pentru care tripletul $(-1, 0, 1)$ este soluție a sistemului de ecuații.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.
- 5p c) Determinați numerele $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-7, 2\}$, pentru care sistemul de ecuații admite soluția (x_0, y_0, z_0) , cu $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Z}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 11xy$.
- 5p a) Demonstrați că $x \circ y = 11\left(x + \frac{1}{11}\right)\left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați numerele reale x , pentru care $x \circ x = \frac{8}{11}$.
- 5p c) Calculați partea întreagă a numărului $a = \left(1 - \frac{1}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{2}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{3}{11}\right) \circ \left(1 - \frac{4}{11}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \sqrt{x} - 1$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(1, -\frac{1}{3}\right)$.
- 5p c) Demonstrați că $x(2\sqrt{x} - 3) \geq -1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră funcția $f_n: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1}$.
- 5p a) Determinați primitiva $G: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x^3 + 1)f_3(x)$, știind că $G(0) = 2020$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f_1(x) dx$.

5p c) Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n .