

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul a_2 al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 + 2a_2 + a_3 = 4$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 6$. Arătați că numărul $f(3) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$ este natural.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(4-x) = 3 - \log_5(24-x)$.
- 5p** 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are exact 45 submulțimi cu două elemente.
- 5p** 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. Determinați numărul real a , știind că vectorii $\vec{u} - \vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Un triunghi dreptunghic are catetele de lungime 6, respectiv 8. Determinați raza cercului înscris în acest triunghi.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 5-a & 10 \\ -2 & -4-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real a , știind că $A(a) \cdot A(a) = A(0)$.
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A(-1) \cdot X = A(0)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3x - 2y + 1$.
- 5p** a) Arătați că $5 * 8 = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $2020^x * 2020^x = 2$.
- 5p** c) Demonstrați că există o infinitate de perechi (m, n) de numere întregi pentru care $m * n = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a , tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a, f(a))$ și $B(-a, f(-a))$ sunt paralele.
- 5p** c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{\ln x}$.
2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2\ln(2x + 1)$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 2\ln(2x + 1)) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p** b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** c) Dacă F este o primitivă a funcției f , arătați că $F(\pi) \leq F\left(\frac{16}{5}\right)$.