Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că modulul numărului complex $z=\frac{1+2i}{1-2i}$ este egal cu 1.

5p **2.** Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\left(\sqrt{2}-1\right)^x$ este pară.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+2}=x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre divizibile cu 3.

5p **5.** În triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$, ecuația mediatoarei laturii AC este $y=3x+1$ și ecuația perpendicularei din A pe BC este $2y=x+7$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

5p **6**. Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\sin x\cos(\pi-x)-\sin(\pi-x)\cos x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(a)\right)=1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(ab)$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$, astfel încât $A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2020\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{3}xy+x+y$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=\frac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-3$. Arătați că $f(xy)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Demonstrați că $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=\frac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)-3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și orice numere reale $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ și x_n.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două asimptote ale graficului funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^4\left(f(x)-f(-x)\right)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>4$, astfel încât $\int_4^a\dfrac{f(x)}{x}dx=10+\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$.