

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numerele $\sqrt{11}-\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ și $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$. Demonstrați că funcția f este impară.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 2^x = \frac{3}{4}$.
- 5p 4. Determinați numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(0,3)$ și $C(-1,2)$. Determinați ecuația dreptei AD , știind că $ABCD$ este paralelogram.
- 5p 6. Triunghiul ABC are $AB = 10$ și $AC = 5$. Arătați că $\sin C = 2 \sin B$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ -2x - 3y = 1 \\ 2x + 4y + az = -2 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(a)) = a + 2$, pentru orice număr real a .
- 5p b) Pentru $a = 0$, determinați inversa matricei $A(a)$.
- 5p c) Pentru $a \neq -2$, rezolvați sistemul de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 5(x+2)(y+2) - 2$.
- 5p a) Arătați că $x * (-2) = -2$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x - 10}{5}$. Demonstrați că $f(x+y) = f(x) * f(y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul real x , astfel încât $x * x * x = 23$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - x - 2$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că imaginea funcției f este intervalul $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x^2(x+1)}$ și $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^2 + 1}{x} - \ln(x+1)$.
- 5p a) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Calculați $\int_1^2 (x+1)f(x) dx$.
- 5p c) Determinați numărul real a , $a > 1$, astfel încât $\int_1^a f(x) dx = \frac{1}{2} - \ln \frac{a+1}{2}$.