Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,-\sqrt{5}<x<\sqrt{7}\right\}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x^2+2bx+1$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că parabolele asociate celor două funcții au același vârf.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$.

5p **4.** Arătați că **nu** există nicio mulțime finită care să aibă exact 12 submulțimi cu 2 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-4,3)$ și $C(5,0)$. Arătați că punctul $H(4,7)$ este ortocentrul triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați $\cos x$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $2\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)=-1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătaţi că matricea $I_3-\frac{1}{11}A$ este inversa matricei B.

5p **c)** Dați exemplu de trei matrice $U,V,T\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 1, astfel încât $U+V+T=B$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-3x-3y+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a pentru care $(-1)*1=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in[12,+\infty)$, atunci mulțimea $[3,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}+f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)\right)^{\sqrt{n}}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(x^4+1\right)f(x)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $\int_0^1 f(x)dx\le\dfrac{\pi}{8}$.

5p **c)** Se consideră primitiva F a lui f pentru care $F(1)=0$. Calculați $\int_0^1 F(x)dx$.