Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că, dacă $z^2+z+2=0$, unde z este număr complex, atunci $z^2+\frac{4}{z^2}=-3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{2x\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x. Arătați că $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+1}-3^x=2^{x+2}-2^{x+1}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A=\left\{\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\ldots,\sqrt{25}\right\}$, numerele 3, 4 și a să reprezinte lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Demonstrați că punctele D, M și N sunt coliniare.

5p **6.** Arătați că, dacă ABC este un triunghi oarecare, atunci $\cos A<\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+z=0\\ 2x+my+z=0\\ x-3y+2z=0\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(m))=m-9$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care sistemul de ecuații admite soluții diferite de $(0,0,0)$.

5p **c)** Pentru $m=9$, se consideră (x_0,y_0,z_0) o soluție a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale astfel încât $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$. Calculați $\frac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x*y=xy+5x+5y+20$.

5p **a)** Arătați că $2*(-1)=23$.

5p **b)** Demonstrați că $e=-4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Pentru $r\in\{0,1,2\}$, notăm cu $A(r)$ mulțimea numerelor naturale care au restul r la împărțirea cu 3. Determinați numerele $r\in\{0,1,2\}$ pentru care $A(r)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\left(e^x-e\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=xe^x-e$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinaţi punctul de extrem al funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln(x+2)}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Calculați $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+\frac{\operatorname{arctg} x}{x+2}\right)dx=\frac{\pi}{4}\ln 3$.