

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că, dacă $z = 3 + i$, unde z este număr complex, atunci $z^2 - 6z + 10 = 0$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2x - 6$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x+3} = x+1$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor sale să fie un număr prim.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(3, -1)$. Știind că punctul M este simetricul lui A față de B și punctul N este simetricul lui B față de M , determinați coordonatele punctului N .
- 5p** 6. Arătați că, dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și $\sin x + \cos x = \cos 2x$, atunci $\sin x - \cos x = -1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați rangul matricei $B = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) - I_3$.
2. Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compozitie $x * y = x^2 y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 6$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 1 = 3$.
- 5p** b) Arătați că $x * y \neq 2$, pentru orice numere raționale x și y .
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi pentru care $m * n = 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 2\ln(x+1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x(x+2)}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați numărul real $a \in (-1, +\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 3x + 2020$.
- 5p** c) Demonstrați că $(x+1)^2 \geq 2\ln(x+1) + 1$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 f^2(x) dx = 15$.

5p | b) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

5p | c) Arătați că $(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n , $n \geq 3$.