Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1 = 2$ și rația $q = \sqrt{5}$. Calculați partea întreagă a lui b_4.

5p **2.** Se consideră funcția bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x-3$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și f^{-1}.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2x^2+x+1\right)-\log_2\left(x^2-x+2\right)=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, suma cifrelor sale să fie divizibilă cu 11.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = a\vec{i} - 2\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

5p **6.** Arătați că, dacă $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos x$, atunci $x = \frac{\pi}{8}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ 2x+(m+1)y+z=2 \\ x+y+(m+1)z=m+1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 0$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru $m=-3$, sistemul de ecuații **nu** are soluții.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, sistemul de ecuații are cel mult o soluție.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - \frac{1}{2}\overline{z_1} - \frac{1}{2}\overline{z_2}$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **a)** Arătați că $(1+i)\circ(1-i) = 1$.

5p **b)** Se consideră $H = \{2+bi \mid b\in\mathbb{R}\}$. Arătați că H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Se consideră numărul complex z_0. Arătați că există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0 \circ z$ este real.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice $a \in (0,+\infty)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4 e^x f(x)\,dx = 27$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt = 2$.