

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Test 16**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați partea întreagă a numărului  $2 + 3\sqrt{5}$ .
- 5p** 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2 - x$  și  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 2 + x$ . Arătați că  $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{3}$ .
- 5p** 4. Se consideră mulțimea  $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ . Determinați numărul de elemente ale mulțimii  $A$  care sunt divizibile cu 2 sau cu 3.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul  $ABC$ , punctul  $G$ , centrul său de greutate și punctele  $M$  și  $N$  astfel încât  $\overline{BM} = \frac{1}{4}\overline{BA}$  și  $\overline{CN} = \frac{2}{5}\overline{CA}$ . Arătați că punctele  $M$ ,  $N$  și  $G$  sunt coliniare.
- 5p** 6. Arătați că, dacă triunghiul  $ABC$  este înscris într-un cerc de rază  $\frac{1}{2}$ , atunci  $\cos^2 A = 1 - BC^2$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(a)) = 4$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** b) Arătați că  $A(a) \cdot A(b) = 2A(a+b)$ , pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p** c) Determinați numărul real  $x$  și numărul natural  $n$  pentru care  $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(5) = 2^n A(x)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = x + y - 7$ .
- 5p** a) Arătați că  $5 \circ 2 = 0$ .
- 5p** b) Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 7 + \log_7 x$ . Arătați că  $f(x) \circ f(y) = f(xy)$ , pentru orice  $x, y \in (0, +\infty)$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $a^2 \circ b^2 \neq 0$ , pentru orice numere întregi  $a$  și  $b$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{2x}(x-5)$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = e^{2x}(2x-9)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$ .
- 5p** c) Arătați că  $e^{2x} \leq \frac{e^9}{2(5-x)}$ , pentru orice  $x \in (-\infty, 5)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1} dx = 2$ .

**5p** b) Arătați că  $\int_1^2 \left( f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}$ .

**5p** c) Determinați  $a \in (1, +\infty)$  astfel încât  $\int_0^x f(e^t) dt = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}) + \ln(a - 1)$ , pentru orice număr real  $x$ .