Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $z^2-z-i=-1$.

5p **2.** Determinați cel mai mic număr natural n pentru care ecuația $x^2-3x+3-n=0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(25x)+\log_x 5=4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 sau cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(4,2)$ și $C(3,0)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x-\sin(\pi-x)+\cos x+\cos(\pi-x)+\operatorname{tg}2x$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A+I_3)=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A\cdot A=O_3$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=X\cdot A$, atunci există numerele reale a, b și c, astfel încât $X=aI_3+bA+cA\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=|x-y|$.

5p **a)** Arătați că $(5*2)*1=2$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Demonstrați că $(a*b)+(b*c)\geq a*c$, pentru orice numere reale a, b și c.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x-1\leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f^2(x)\,dx=4$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \ln\left(f\left(x\right)\right)dx$.

5p **c)** Demonstrați că există un singur număr real x, $x \in \left[0,+\infty\right)$, pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt = 2021$.