Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{10}-\sqrt{6}$, 2 și $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^{2021}}{x^2+1}$. Arătați că funcția f este impară.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-3\cdot 2^{x+1}=16$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\{0,2,4,6,8\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(0,3)$ și $C(-2,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Triunghiul ABC are măsura unghiului A de $30°$ și măsura unghiului B de $45°$. Arătați că $AC=BC\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}4 & 1 & m\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}4x+y+mz=9\\ x+2y-z=4\\ -2x-3y=-7\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(m))=m-10$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați inversa matricei $A(9)$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, $m\neq 10$, dacă (a,b,c) este soluția sistemului de ecuații, atunci $\log_2 a=b+c$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $x*3=3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x, astfel încât $x*x*x=-46$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{5^x}{7}+3$. Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3-x-2}{x^2(x+2)}$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2x+\dfrac{1}{x}-4\ln(x+2)$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 (x+2) f(x)\, dx$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m > 2$, astfel încât $\int_2^m f(x)\, dx = 2m + \frac{1}{m} - \frac{17}{2}$.