Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\ge1}$ cu $b_2=2$ și $b_4=4$. Determinaţi b_6.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat pe dreapta $y=3x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-2^{x+1}-3=0$.

5p **4.** Determinați numărul de numere naturale de trei cifre care au exact două cifre egale.

5p **5.** Segmentele AB și $A'B'$ au același mijloc. Demonstrați că $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BA'}=\vec{0}$.

5p **6.** Demonstrați că, în orice triunghi ABC, are loc relația $AB+AC+BC=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+(a+1)y+(a+2)z=a \\ bx+(b+1)y+(b+2)z=b \\ y+z=1 \end{cases}$ și matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(X(0,1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice numere reale distincte a și b, sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Demonstrați că, dacă (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $y_0^2-z_0^2-2ax_0=3$, pentru orice număr real a.

2. Pe mulţimea $M=(2,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=(x-1)^{\log_3(y-1)}+1$.

5p **a)** Arătați că $5*10=17$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x*x=x*x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{e^{2x}+x^4+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f, este paralelă cu dreapta de ecuație $x-\sqrt{3}y=0$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+3}\right)$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(2f(x)+\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este strict crescătoare.

5p **c)** Arătați că, pentru orice numere reale a și b, cu $a<b$, $\int_a^b f(x)F^2(x)dx>0$, pentru orice primitivă F a funcției f.