

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 3 + 2i$. Arătați că $z + \frac{13}{z} = 6$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x$. Determinați numărul real a pentru care $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(-a)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x+5} = 9 \cdot 3^{x+1}$.
- 5p 4. Se consideră A , o mulțime cu 4 elemente. Calculați probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor lui A , aceasta să aibă un număr impar de elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(3,5)$ și $C(0,6)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este paralelă cu mediana din vârful C a triunghiului ABC .
- 5p 6. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC , știind că $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$ și $B = \frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră a un număr real nenul și matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & -4x \\ 0 & a & 0 \\ x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(x)) = a$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați numărul real nenul a astfel încât $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Pentru $a = 1$, determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(3)$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \log_2(2^x + 2^y - 1)$.
- 5p a) Arătați că $0 * 2021 = 2021$.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați $x \in M$ pentru care $x * (x+1) * (x+2) = \log_2 54$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1-x^2}{2(x^2+1)\sqrt{(x^2+x+1)(x^2+1)}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $\sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}} \leq \sqrt{6}$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3 - 2 \ln x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) + 2 \ln x) dx = 14$.

5p b) Calculați $\int_1^e (2x + 3 - f(x)) dx$.

5p c) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x^3 + 1) dx = \frac{4(2 - \ln 2)}{3}$.