

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numerele $\sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră o funcție impară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (f(x))^2$ este pară.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x} - \sqrt{2} \cdot 2^x = 2^{x+1} - 2\sqrt{2}$.
- 5p** 4. Determinați termenul care îl conține pe x^8 din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$, unde $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** 5. În planul triunghiului ABC se consideră punctul M , astfel încât $2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$. Determinați numărul real k , știind că $\overline{BC} = k \cdot \overline{CM}$.
- 5p** 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $\sin 2x + 6 \cos x - \sin x - 3 = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $M(m) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & m & 1 \\ m-1 & m & -m \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

- 5p** a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr real m , rangul matricei $M(m)$ este cel puțin egal cu 2.
- 5p** c) Determinați numărul real m , $m \neq -1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A .
2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$.
- 5p** a) Arătați că $(2+i) \circ (2-i) = 9$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a , numărul $A = (-1 + (a+1)i) \circ (-1 + (a-1)i)$ este real strict mai mic decât 0.
- 5p** c) Determinați numerele complexe z pentru care $z \circ z = -5$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x+1}{x+3}$.

- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- 5p** c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x))$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (e^x f(x) - 2) dx = -\frac{2}{3}$.

5p | **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x) dx$.

5p | **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$. Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.