

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul complex z , pentru care $z - 2\bar{z} = -2 + 6i$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + m$, unde m este număr real pozitiv. Determinați numărul real pozitiv m pentru care numerele $f(0)$, $f(1)$ și $f(2)$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_5(x-1) = \log_5(3x+1)$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A .
- 5p 5. Se consideră punctele A , B , C și D , astfel încât $2\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AC}$. Demonstrați că $\overline{AB} = \overline{DC}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu măsura unghiului A de 30° . Arătați că lungimea laturii BC este egală cu lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(m) + A(-m)) = 8$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Determinați numărul real m pentru care are loc egalitatea $A(m) \cdot A(m) = A(0)$.
- 5p c) Demonstrați că $A(1) - A(2) + A(3) - A(4) + \dots + A(2n-1) - A(2n) = n(A(-1) - A(0))$, pentru orice număr natural nenul n .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + 4xy + y^2$.
- 5p a) Arătați că $\frac{1}{2} * \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $(x * (-x)) * ((-x) * x) = 24x$.
- 5p c) Demonstrați că $x * \frac{1}{x} \geq 6$, pentru orice număr real nenul x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(1-x)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{2x}$.
- 5p c) Demonstrați că $\frac{e^x+2}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{e^{2x}+2}$, pentru orice număr real x .

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - \ln x$.

5p a) Arătați că $\int_1^{\sqrt{2}} (f(x) + \ln x) dx = \frac{3}{4}$.

5p b) Calculați $\int_1^e x(x^3 - f(x)) dx$.

5p c) Arătați că $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} f(\sqrt{x}) dx = \frac{2e^3 - 5}{3}$.