

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Testul 9**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*  
*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} > \frac{3}{4}$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -3x + 18$ . Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției  $f \circ f$  cu axa  $Ox$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{3-x} - 2^{2-x} + 2^{5-x} = 9$ .
- 5p** 4. Determinați termenul care **nu** îl conține pe  $x$  din dezvoltarea  $\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$ , unde  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(a, 1)$  și  $B(-2, 5)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$ , știind că mijlocul segmentului  $AB$  aparține dreptei de ecuație  $y = 2x + 3$ .
- 5p** 6. Calculați lungimea laturii  $AB$  a triunghiului  $ABC$ , știind că  $\text{tg } C = 1$  și că triunghiul  $ABC$  este înscris într-un cerc de rază 3.

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(3)) = 10$ .
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr natural  $n$ ,  $n \geq 2$ , rangul matricei  $A(n)$  este egal cu 3.
- 5p** c) Arătați că, pentru orice număr natural  $m$ ,  $m \geq 2$ , inversa matricei  $A(m)$  **nu** are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea  $M = (2, +\infty)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = \frac{xy - 4}{x + y - 4}$ .
- 5p** a) Arătați că  $8 \circ 8 = 5$ .
- 5p** b) Arătați că  $(x + 2) \circ (y + 2) > (x + y) \circ 4$ , pentru orice  $x, y \in M$ .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă  $x \in M$  și  $n$  este număr natural,  $n \geq 2$ , astfel încât  $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x} = 2^n - \frac{1}{2^n}$ , atunci  $x$  este pătratul unui număr natural.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x - 3) - 2 \ln(x^2 - 9)$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{3(1-x)}{x^2 - 9}$ ,  $x \in (3, +\infty)$ .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $f$  este bijectivă.
- 5p** c) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 3} ((x - 3)f(x)) = 0$ .

2. Se consideră funcția  $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \frac{x^2}{x^2 - 4}$ .

5p a) Arătați că  $\int_1^{\frac{3}{2}} \left( f(x) - \frac{x^2}{x^2 - 4} \right) dx = \frac{5}{8}$ .

5p b) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) + f(-x)) dx = 4(1 - \ln 3)$ .

5p c) Determinați  $a \in (0, \sqrt{3})$ , pentru care  $\int_a^{\sqrt{3}} \sqrt{x - f(x)} dx = \sqrt{3} - 1$ .