Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=5x+20$. Calculați $(g\circ f)(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-5}=\dfrac{1}{16}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB=4$, $BC=6$ și măsura unghiului ABC de $120°$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=12$, $AC=16$ și $BC=20$. Arătați că $\dfrac{r}{R}=\dfrac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=5$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=3$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

5p **a)** Arătați că $4*3=2$.

5p **b)** Arătați că $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-9)(x^2-4)+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2x(2x^2-13)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\dfrac{1}{30}$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale .

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=3$.

5p **b)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{1} x f(x)dx = 0$.