

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 6**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Calculați media geometrică a numerelor  $x = \log_6 8 + \log_6 27$  și  $y = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 + 6^2}$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 2x + a$ , unde  $a$  este număr real. Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care graficul funcției  $f$  intersectează axa  $Ox$  în două puncte distincte.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $7^{2-x^2} = 7^{2x-1}$ .
- 5p** 4. Arătați că produsul numerelor  $A_5^2$ ,  $C_6^2$  și  $A_4^2$  este pătratul unui număr natural.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, a+1)$ ,  $B(2, -3)$  și  $C(3, 1-a)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$  pentru care punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt coliniare.
- 5p** 6. Determinați raza cercului înscris în triunghiul  $MNP$ , dreptunghic în  $N$ , știind că  $MN = 12$  și  $NP = 16$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + 4y - az = 1 \\ x + ay - z = 0 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = -3$ .
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care matricea  $A(a)$  este inversabilă.
- 5p** c) Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție  $(x_0, y_0, z_0)$  astfel încât  $x_0 = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{3}$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 27}$ .
- 5p** a) Arătați că  $2021 * (-2021) = -3$ .
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p** c) Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x+27}$ . Demonstrați că  $f(x) * f(y) = f(x+y)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^6 + 7}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{-3x^2(x^3 - 1)(x^3 + 7)}{(x^6 + 7)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați asimptotele graficului funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{7}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+1}{e^{2x}}$ .

5p a) Arătați că  $\int_0^1 \frac{e^{3x} f(x)}{2x+1} dx = e - 1$ .

5p b) Calculați  $\int_0^1 e^x f(x) dx$ .

5p c) Arătați că  $\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{e-1}{2e^2}$ .