Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_{2021} al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_1=2$ și $a_3=8$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$ cu dreapta d de ecuație $y=-x+3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3^{x+2}}=27$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizor al numărului 48.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+m\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-4)\vec{i}+2\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=6$, $AC=3$ și unghiul A de $120°$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a & 1 & 1\\ 1 & 2a & 1\\ 1 & a & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2ax+y+z=0\\ x+2ay+z=1\\ x+ay-z=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-1))=-3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.

5p **c)** Determinați numărul întreg a, știind că există numerele reale y_0 și z_0 astfel încât $(1,y_0,z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+5xy+y$.

5p **a)** Verificați dacă $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=5\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați partea întreagă a numărului $q=\left(-\frac{1}{2}\right)\circ\left(-\frac{1}{3}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{2021}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\frac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,0)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^n+1}{x^2+1}$, unde n este număr natural nenul.

5p **a)** Pentru $n=3$, se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x^2+1)f(x)$. Determinați primitiva G a funcției g pentru care $G(0)=2021$.

5p **b)** Pentru $n=1$, calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4} \le \int_0^1 f(x)dx \le 1$, pentru orice număr natural n, $n \ge 2$.