

**Examenul de bacalaureat național 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 8**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_2 = 2$  și  $b_3 = 4$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 5x + 3$ . Determinați produsul absciselor punctelor în care graficul funcției  $f$  intersectează axa  $Ox$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2\sqrt{x+2} = 1 - x$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,3)$ ,  $B(-1,0)$  și  $C(a, a+2)$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$  pentru care vectorii  $\overline{OC}$  și  $\overline{AB}$  sunt coliniari.
- 5p** 6. Arătați că  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$ , pentru orice număr real  $x$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(0)) = -2$ .
- 5p** b) Arătați că matricea  $A(a)$  este inversabilă, pentru orice număr real  $a$ .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă  $a$  și  $b$  sunt numere întregi și  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $A(a) \cdot X = A(b)$ , atunci elementele matricei  $X$  sunt numere întregi.
2. Pe mulțimea  $A = (0, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}$ .
- 5p** a) Arătați că numărul  $a = 2 \circ 4$  este întreg.
- 5p** b) Arătați că  $x \circ y \geq 4$ , pentru orice  $x, y \in A$ .
- 5p** c) Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” **nu** admite element neutru.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (-1,1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$ ,  $x \in (-1,1) \cup (1, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul în care graficul intersectează axa  $Oy$ .
- 5p** c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}$ .
2. Se consideră funcția  $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^2 (x+4)f(x)dx = 6$ .

**5p** b) Calculați  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**5p** c) Arătați că  $\int_0^n f(x)e^{-x} dx < 1$ , pentru orice număr natural nenul  $n$ .