Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al patrulea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2 = 6$ și $b_3 = 3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Determinați numerele reale a, pentru care $f(-a) + f(a) = 0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x+1} = 16\cdot 4^{-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(4,-3)$ şi $C(a,a+3)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a pentru care dreapta OC trece prin mijlocul segmentului AB.

5p **6**. Arătați că $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Arătaţi că $\det(B(1,2)) = -1$.

5p **b)** Arătaţi că $\det(A\cdot B(a,b)) = 0$, pentru orice numere reale a şi b.

5p **c)** Determinați numerele reale a şi b pentru care $A\cdot B(a,b) = B(a,b)\cdot A$.

2. Pe mulțimea $M = [1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y = |x-y|+1$.

5p **a)** Arătaţi că $3\circ 5 = 3$.

5p **b)** Calculaţi $a-b$, ştiind că $a = (2\circ 3)\circ 4$ şi $b = 2\circ(3\circ 4)$.

5p **c)** Arătaţi că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m\circ n = m$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f **nu** este surjectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 2f(x)\,dx = 3$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^e f(e^x)\,dx \leq \int_0^e e^{f(x)}\,dx$.