RADICALUL (RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR REAL.)

$$a^2 = b \Rightarrow \sqrt{b} = \sqrt{a^2} = |a|$$

Observația 1.
Rezultatul unui radical este un număr mai mare sau egal cu 0.
Observația 2.
Dacă sub radical avem sau putem face UN SINGUR PĂTRAT, dispar radicalul și pătratul și apare modulul
Observația 3.
Dacă sub radical avem un pătrat perfect sau pătratul unui număr rațional,vom obtine numere naturale sau raționale. În caz contrar se obțin numere iraționale.

Ex $\sqrt{2^2} = |2| = 2$

$$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = (\sqrt{3}-1)$$

$$\sqrt{3^2 \cdot 5^2} = \sqrt{(3 \cdot 5)^2} = \sqrt{15^2} = |15| = 15$$

$$\sqrt{\frac{4^2}{7^2}} = \sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2} = \left|\frac{4}{7}\right| = \frac{4}{7}$$

Operații cu radicali

1. Adunarea şi scăderea.

– Se scot factori de sub radicali unde este posibil.

- se calculează radicalii unde este posibil.

- dacă radicalii sunt diferiți nu se pot face adunări sau scăderi între ei.

$$\sqrt{A}+\sqrt{B} \neq \sqrt{A+B}$$

$$\sqrt{A}-\sqrt{B} \neq \sqrt{A-B}$$

- dacă radicalii sunt identici, se operează DOAR CU FACTORII DIN FAȚA LOR.

NU SE ADUNĂ SAU SCAD NUMERELE DE SUB RADICAL!

$$A\sqrt{B}+C\sqrt{B}=(A+C)\sqrt{B}$$

$$A\sqrt{B}-C\sqrt{B}=(A+C)\sqrt{B}$$

$$\sqrt{B}+\sqrt{B} \neq \sqrt{2B}$$

$$\sqrt{B}+\sqrt{B}=2\sqrt{B}$$

Ex $\quad 3\sqrt{5}-7\sqrt{5}=-4\sqrt{5}$

$$-4\sqrt{3}+5\sqrt{2}-1-\sqrt{3}-8\sqrt{2}+4=-5\sqrt{3}-3\sqrt{2}+3$$

$$4\sqrt{12}-\sqrt{9}+\sqrt{3}-1=8\sqrt{3}-3+\sqrt{3}-1$$

$$=9\sqrt{3}-4$$

2 Înmulțirea și împărțirea.

Putem înmulți sau împărți radicali diferiți.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$a\sqrt{b} \cdot c\sqrt{d} = a \cdot c\sqrt{b \cdot d}$$

$$a \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$a\sqrt{b} : c\sqrt{d} = \frac{a}{c} \cdot \sqrt{\frac{b}{d}}$$

Ex.

$$2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{12}$$

$$-4\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = -4\sqrt{10}$$

$$7.(-2\sqrt{3}) = -14\sqrt{3}$$

$$-9\sqrt{6} : \sqrt{3} = -9\sqrt{2}$$

$$-8\sqrt{10} : (-4\sqrt{2}) = 2\sqrt{5}$$

3 Scoaterea factorilor de sub radical.

Se descompune numărul de sub rodical în factori primi.Pentru fiecare pereche de numere identice va ieşi un reprezentant afară din radical. Cel care nu are pereche rămâne sub radical.Factorii care ies se înmulțesc între ei, cei care nu ies se înmulțesc între ei.

În orice exercițiu cu radicali se verifică dacă se scot factori sau se calculează radicalul.

Ex $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

72	2	> 2
36	2	
18	2	
9	3	> 3
3	3	
1		

$\sqrt{600} = 10\sqrt{6}$

600	2	> 2
300	2	
150	2	
75	3	
25	5	> 5
5	5	
1		

Varianta 2.
Se descompune numărul în factori primi.

$$\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$$

$$\sqrt{a^{2k+1}} = |a^k|\sqrt{a}$$

Ex

$$\sqrt{2^6} = 2^3$$

$$\sqrt{5^9} = 5^4 \cdot \sqrt{5}$$

$$\sqrt{3^8 \cdot 2^7} = 3^4 \cdot 2^3 \cdot \sqrt{2}$$

4. Ridicarea la putere.

$$(\sqrt{a})^2 = a. \qquad (\sqrt{a})^{2k+1} = a^k \cdot \sqrt{a}$$

$$(\sqrt{a})^{2k} = a^k \qquad (a\sqrt{b})^n = a^n \cdot (\sqrt{b})^n$$

Raționalizarea numitorului

Def. Procedeul prin care transformăm numitorul unei frații dintr-un număr irațional într-un număr rațional.

Metoda: Prin amplificare

Caz 1. Numitorul este format dintr-un singur termen sau un produs de termeni.
Se scot factori de sub radicalii de la numitor dacă este posibil
Se amplifică fracția cu radicalul rămas.
Nu se face înmulțirea la numărător până la calculul final al numitorului.
La numitor dispare doar radicalul, nu tot numărul.

Ex. $^{\sqrt{2})}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $^{\sqrt{3})}\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$

$$\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{12}} = \frac{\cancel{6}\sqrt{5}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = {}^{\sqrt{3})}\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{15}}{\cancel{3}} = \sqrt{15}$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = {}^{\sqrt{2})}\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}-2}{4} = \frac{\cancel{2}(\sqrt{2}-1)}{\cancel{4}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

Caz 2 Numitorul este format din sume sau diferențe de 2 termeni din care cel puțin 1 conține radical.
Pentru raționalizare folosim formula

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Dacă la numitor avem sumă, vom amplifica fracția cu diferența termenilor de la numitor.
Pentru a evita obținerea unor numitori negativi înainte de amplificare la numitor se trece termenul mai mare primul.
Dacă la numitor avem diferență vom amplifica fractia cu suma termenilor de la numitor. In ambele cazuri la numitor se ajunge la diferență de pătrate.
NU SE FACE ÎNMULȚIREA LA NUMĂRĂTOR PÂNĂ NU SE FINALIZEAZĂ CALCULUL NUMITORULUI.
EXISTĂ POSIBILITATEA SIMPLIFICĂRII PE VERTICALĂ.

Ex. $$\frac{1}{2+\sqrt{5}} = {}^{\sqrt{5}-2)}\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{1(\sqrt{5}-2)}{5-4}$$

$$= \frac{1(\sqrt{5}-2)}{1} = \sqrt{5}-2$$

$$^{2\sqrt{2}+\sqrt{5})}\frac{3}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{3(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{2})^2-\sqrt{5}^2} = \frac{3(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{8-5}$$

$$= \frac{\cancel{3}(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{\cancel{3}} = 2\sqrt{2}+\sqrt{5}$$

Radicalii compuși

Forma generală $\sqrt{A+B\sqrt{c}}$ sau $\sqrt{A-B\sqrt{c}}$

$$B\sqrt{c} = 2ab$$

$$\Rightarrow A + B\sqrt{c} = (a+b)^2$$

$$A = a^2 + b^2$$

$$A - B\sqrt{c} = (a-b)^2$$

Exemplu. $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

$4\sqrt{3} = 2ab \Rightarrow ab = 2\sqrt{3}$

$7 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow a = 2$

$b = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$.