DESCOMPUNEREA EXPRESIILOR ALGEBRICE ÎN FACTORI

OBIECTIVUL

Dacă trebuie să descompunem o expresie algebrică în factori,ca la descompunerea numerelor în factori, trebuie să scriem expresia dată, doar sub formă de produse.

SĂ NE REAMINTIM

În calculul algebric folosim: „termeni simpli" (numere reale reprezentate prin litere) cu forma generală coeficient$\cdot$**parte literală**^{grad} $\left(5x^3, -2y^4, \sqrt{3}a^2b, -\frac{1}{4}x^5y^3\right)$

„termeni compuşi" (expresii algebrice) −sume sau diferenţe de termeni care nu sunt asemenea $(3x+1, x^2+4x+3, -5a^2+4a)$

METODE DE LUCRU

1.Factor comun „termen simplu" pentru toţi termenii.

Condiţii

Expresia nu conţine paranteze.

Toţi termenii au aceeaşi parte literală.

Aplicare

Partea literală luată la puterea cea mai mică,împreună cu cel mai mare divizor comun al coeficienţilor vor forma factorul comun.În paranteză apar rezultatele împărţirii fiecărui termen la factorul comun.

Exemple $4x^3 - 8x^2 + 6x = 2x(2x^2 - 4x + 3)$

$25x^4 + 15x^2 - 10x^3 = 5x^2 \cdot (5x^2 + 3 - 2x)$

$9a^2b + 6ab^2 + 3ab = 3ab(3a + 2b + 1)$

2.Factor comun „termen compus" pentru toţi termenii.

Condiţii

Expresia conţine sume sau diferenţe de produse de „termeni compuşi".

Ce puţin un „termen compus" apare în toate produsele.

Aplicare

„Termenul compus" care se repetă va fi factorul comun.

Într-o paranteză dreaptă apar rezultatele împărţirii fiecărui produs la factorul comun.Se fac calculele în paranteza dreaptă până se ajunge la forma cea mai simplă.

Exemple 1) $3x \cdot (2x-5) - 7 \cdot (2x-5) = (2x-5) \cdot (3x-7)$

2) $(4x-3) \cdot (2x+7) + (4x-3) \cdot (x-2) =$

$= (4x-3) \cdot [(2x+7) + (x-2)] =$

$= (4x-3) \cdot (2x+7+x-2) =$

$= (4x-3)(3x+5)$

3) $(6x-1) \cdot (5x+2) - (6x-1)(3x+4) =$

$= (6x-1) \cdot [(5x+2) - (3x+4)] =$

$= (6x-1)(5x+2-3x-4) =$

$= (6x-1)(2x-2)$

$= 2 \cdot (6x-1)(x-1)$

DESCOMPUNEREA EXPRESIILOR ALGEBRICE ÎN FACTORI 2

9) $2x \cdot (x-3) \cdot (4x-9) - 3(\mathbf{3-x}) \cdot (9-4x) =$
$= 2x \cdot (x-3) \cdot (4x-9) - 3 \cdot (-1) \cdot (x-3) \cdot (-1) \cdot (4x-9) =$
$= 2x \cdot (x-3) \cdot (4x-9) + 3 \cdot (\boldsymbol{x-3}) \cdot (4x-9) =$
$= (x-3) \cdot (4x-9) \cdot (2x+3)$

Obs. Dacă trebuie să schimbăm semnele într-un număr par de paranteze care se înmulțesc, nu schimbăm semnul din fața produsului.

10) $(3x-7)^3 - 2 \cdot (\mathbf{7-3x})^{\mathbf{2}} =$
$= (3x-7)^3 - 2 \cdot [(-1)(3x-7)]^2 = (3x-7)^3 - 2 \cdot (-1)^2 \cdot (3x-7)^2 =$
$= (3x-7)^3 - 2(\mathbf{3x-7})^{\mathbf{2}} =$
$= (3x-7)^2 \cdot [(3x-7)-2] =$
$= (3x-7)^2 \cdot (3x-9) =$
$= 3 \cdot (3x-7)^2(x-3)$

Obs. Dacă trebuie să schimbăm semnele intr-o paranteză la putere pară, nu schimbăm semnul din fața ei.

11) $4x \cdot (2x-1)^2 - (1-2x)^3 =$
$= 4x \cdot (2x-1)^2 - [(-1) \cdot (2x-1)]^3 =$
$= 4x \cdot (2x-1)^2 - (-1)^3 \cdot (2x-1)^3 =$
$= 4x(2x-1)^2 + (\mathbf{2x-1})^{\mathbf{3}} =$
$= (2x-1)^2 \cdot [4x + (2x-1)] =$
$= (2x-1)^2(6x-1)$

Obs. Dacă trebuie să schimbăm semnele intr-o paranteză la putere impară, schimbăm semnul din fața ei.

4) $(2x-3)^2 - (2x-3) \cdot (4x+1) =$
$= (2x-3) \cdot [(2x-3) - (4x+1)] =$
$= (2x-3) \cdot (2x-3-4x-1) =$
$= (2x-3) \cdot (-2x-4) =$
$= -2 \cdot (2x-3) \cdot (x+2)$

5) $3x \cdot (x-2) + x - 2 =$
$= 3x \cdot (x-2) + (x-2) =$
$= (x-2) \cdot (3x+1)$

Obs. Putem pune paranteză rotundă după plus pentru a evidenția factorul comun.

6) $3x \cdot (x-2) - \mathbf{2} + x =$
$= 3x \cdot (x-2) + x - \mathbf{2} =$
$= 3x \cdot (x-2) + (x-2) =$
$= (x-2)(3x+1)$

Obs. Putem schimba locul termenilor în adunări și scăderi cu condiția ca fiecare termen să-și ia semnul cu el.

7) $5x \cdot (8x-3) - 8x + 3 =$
$= 5x \cdot (8x-3) - 1 \cdot (8x-3) =$
$= (8x-3) \cdot (5x-1)$

Obs.Termenul compus din afara parantezei rotunde, pentru că are toate semnele diferite față de termenul din paranteză este opusul acestuia.Putem scrie un termen ca opusul lui înmulțit cu -1.

8) $3x \cdot (4x-7) + 5 \cdot (7-4x) =$
$= 3x \cdot (4x-7) + 5 \cdot (-1) \cdot (4x-7) =$
$= 3x \cdot (4x-7) - 5(4x-7) =$
$= (4x-7)(3x-5)$

Obs. Dacă trebuie să schimbăm semnele într-un număr impar de paranteze care se înmulțesc schimbăm semnul din fața produsului. (+□- sau -□+)

DESCOMPUNEREA EXPRESIILOR ALGEBRICE ÎN FACTORI 3

3.Factor comun „termen simplu” pentru grupe de termeni din expresie.

Condiții
Expresia nu conține paranteze.
Putem da factor comun un „termen simplu” în grupe de termeni din expresie.

Aplicare
Dăm factor comun în grupe de termeni astfel încât să ajungem la factor comun „termen compus” pentru toți termenii.

Exemple
1) $x^4 + x^3 + 4x + 4 =$
$= x^3 \cdot (\boldsymbol{x+1}) + 4(\boldsymbol{x+1}) =$
$= (\boldsymbol{x+1}) \cdot (x^3 + 4)$
Obs.În expresiile cu număr par de termeni putem da factor comun pe perechi.

2) $x^3 - 2x^2 - 5x + 10 =$
$= x^2(\boldsymbol{x-2}) - 5(\boldsymbol{x-2}) =$
$= (\boldsymbol{x-2}) \cdot (x^2 - 5)$
Obs.La a doua pereche am dat factor comun pe −5 pentru a schimba și semnele celor 2 termeni.

3) $\boldsymbol{a \cdot b + a \cdot c} + \boldsymbol{b^2 + bc} =$
$= \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b+c}) + \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{b+c}) =$
$= (\boldsymbol{b+c}) \cdot (a+b)$

4) $\boldsymbol{3x-2y} + 6xy - 4y^2 - 9x^2y + 6xy^2 =$
$= 1 \cdot (\boldsymbol{3x-2y}) + 2y \cdot (\boldsymbol{3x-2y}) - 3xy(\boldsymbol{3x-2y}) =$
$(\boldsymbol{3x-2y}) \cdot (1 + 2y - 3xy)$

DESCOMPUNEREA EXPRESIILOR ALGEBRICE ÎN FACTORI 4

4.Se verifică formula de calcul prescurtat

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$$

unde a și b pot fi „termeni simpli” sau „termeni compuși”.

Condiție

Expresia este formată din diferența pătratelor a doi „termeni simpli” sau ”compuși”.

Aplicare

Se identifică într-un membru al formulei corespondenții lui a și b și se înlocuiesc în celălalt membru al formulei.

Exemple

1) $x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)$

$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$

a=x b=2

2) $4x^2 - 9 = (2x-3)\cdot(2x+3)$

$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$

a=2x b=3

$a^2 \quad - \quad b^2 \quad = \quad (\quad a \quad - \quad b \quad) \cdot (\quad a \quad + \quad b)$

3) $(2x-5)^2 - (x+1)^2 = [(2x-5)-(x+1)]\cdot[(2x-5)+(x+1)] = (2x-5-x-1)\cdot(2x-5+x+1) = (x-6)\cdot(3x-4)$

Obs.Se fac calculele în parantezele drepte până se ajunge la forma cea mai simplă.

$a^2 \quad - \quad b^2 \quad = \quad a \quad - \quad b \quad \cdot \quad a \quad + \quad b$

4) $9\cdot(2x-5)^2 - 16\cdot(x-2)^2 = [3\cdot(2x-5) - 4\cdot(x-2)]\cdot[3\cdot(2x-5)+4\cdot(x-2)] = (6x-15-4x+8)(6x-15+4x-8) = (2x-7)\cdot(10x-23)$

DESCOMPUNEREA EXPRESIILOR ALGEBRICE ÎN FACTORI 5

5.Se verifică formulele de calcul prescurtat

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$

$a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc=(a-b+c)^2$

$a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc=(a+b-c)^2$

$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc=(a-b-c)^2$

unde a și b pot fi „termeni simpli” sau ”termeni compuși”, nu neapărat în această ordine.

Condiție

Expresia este formată din sume sau diferențe de 3, 5 sau 6 ” termeni simpli” sau ”compuși”.

Aplicare

Se identifică într-un membru al formulei, corespondenții lui a, b și c și se înlocuiesc în celălalt membru al formulei.

Exemple

a^2 b^2 a b

1) $x^2-6x+9=(x-3)^2$

$2ab$

$a=x$ $b=3$

a^2 b^2 a b

2) $25x^2+70x+49=(5x+7)^2$

$2ab$

$a=5x$ $b=7$

a^2 b^2 a^2 b^2

3) $-12x+36x^2+1=36x^2-12x+1=(6x-1)^2$

Obs.Căutăm posibilele pătrate din expresie pentru identificarea corespondenților lui a și b, indiferent de poziție.Pătratele vor avea mereu același semn, în general plus.Dacă pătratele sunt cu minus,se dă factor comun -1 în toată expresia și apoi se scrie formula.

a^2 b^2 a b

4) $(3x-5)^2+(4x-7)^2-2\cdot(3x-5)(4x-7)=[(3x-5)-(4x-7)]^2=(3x-5-4x+7)^2=(2-x)^2$

Obs.În acest caz corespondenții lui a și b sunt „termeni compuși”.

DESCOMPUNEREA EXPRESIILOR ALGEBRICE ÎN FACTORI 6

6.Varianta „ciocan”

Condiție
Expresia trebuie să fie de forma ax^2+bx+c și să nu fie formulă de calcul prescurtat.

Aplicare
Se „sparge” bx în dx și ex astfel încât
$d \cdot e = a \cdot c$ și $d+e=b$.
Se ajunge la o expresie formată din 4 termeni.Se dă factor comun pe perechi și apoi factor comun „termenul compus” care se repetă.

Exemple
1) $x^2-5x+6 = x^2-3x-2x+6 = x(x-3)-2(x-3) = (x-3)(x-2)$
$d \cdot e = 1 \cdot 6$
$d+e=-5$ $\rightarrow$ $d=-3$ și $e=-2$

7.Varianta „delta”

Condiție
Expresia trebuie să fie de forma ax^2+bx+c

Aplicare
Se calculează $\Delta=b^2-4ac$. Avem următoarele cazuri:
-dacă $\Delta<0$,expresia nu se descompune.
-dacă $\Delta=0$, expresia este formulă de calcul prescurtat $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
- Dacă $\Delta>0$, se calculează $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ și $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ și expresia descompusă va fi $a(x-x_1)(x-x_2)$

Exemple
1) X^2+4x+5 $a=1,b=4,c=5$ $\Delta=b^2-4ac=16-20=-4$.Pentru că Δ este negativ, expresia nu se descompune.
2) X^2-6x+9 $a=1,b=-6,c=9$, $\Delta=b^2-4ac=36-36=0$.Pentru că Δ este 0 expresia descompusă va fi $(x-3)^2$
3) $2x^2-x-3$ $a=2,b=-1,c=-3$ $\Delta=b^2-4ac=1+24=25$.Pentru că Δ este pozitiv calculăm $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-1$ apoi $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3}{2}$.Expresia descompusă va fi $2(x+1)(x-\frac{3}{2})=(x+1)(2x-3)$

Obs. Varianta „delta” se folosește pentru a verifica rapid dacă unele expresii se descompun sau ca alternativă la varianta „ciocan”.

DESCOMPUNEREA EXPRESIILOR ALGEBRICE ÎN FACTORI 7

8.Varianta „dai și iei”

Condiție
Expresia nu conține paranteze.

Aplicare
Se adaugă un termen „simplu” pentru a completa formula de calcul prescurtat $a^2+2ab+b^2$ și apoi se scade termenul adăugat.Se ajunge apoi la formula de calcul prescurtat $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ unde a și b pot fi și termeni „compuși”.

Exemple
1) $X^4+x^2+1=x^4+x^2+x^2+1-x^2=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1-x)(x^2+1+x)$
2) $X^8+1=x^8+2x^4+1-2x^4=(x^4+1)^2-2x^2=(x^4+1-x^2\sqrt{2})(x^4+1+x^2\sqrt{2})$

9.Varianta „înlocuirii”

Condiție
În expresie sunt termeni ”compuși” care se repetă dar care nu pot fi dați factor comun.

Aplicare
Vom nota acești termeni cu altă literă. Descompunem noua expresie obținută după care ne întoarcem la notația inițială.

Exemple
1) $(\underbrace{x^2+3x}_{a})(\underbrace{x^2+3x}_{a}+5)+6=a(a+5)+6=$

$a^2+5a+6+a^2+2a+3a+6=$
$a(a+2)+3(a+2)=$
$(a+2)(a+3)=$
$(x^2+3x+2)(x^2+3x+3)$

Dacă vom calcula Δ pentru expresiile din cele două paranteze vom obține unul pozitiv și unul negativ.În acest caz prima expresie se mai poate descompune.Vom ajunge la $(x+1)(x+2)(x^2+3x+3)$

OBSERVAȚII DE FINAL. DUPĂ PRIMUL NIVEL DE DESCOMPUNERE, SE VERIFICĂ ȘI DACĂ EXPRESIILE DIN PARANTEZELE OBȚINUTE SE DESCOMPUN .
SE POT FOLOSI ÎN CADRUL ACELEIAȘI DESCOMPUNERI MAI MULTE VARIANTE.